CLUB APOLLO 13, 16. Wettbewerb
Aufgabe 2
- MUSTERLÖSUNG -

a) Zahlensysteme (14 Punkte)

Neben der Rechenmaschine entwickelte Leibniz auch das Binär- oder Dualsystem, das heutzutage nicht nur in der Informatik an verschiedensten Stellen Verwendung findet.
Im Gegensatz zu dem in der Schule verwendeten Dezimalsystem mit zehn Ziffern (0 bis 9) gibt es im Binärsystem nur zwei Ziffern (0 und 1).

1) Beschreibt in wenigen Sätzen, wie man eine Zahl vom Dezimalsystem in das Binärsystem umrechnen kann. Was muss man machen, wenn man eine Zahl vom Binärsystem in das Dezimalsystem umrechnen möchte?

Antwort – Teil 1: Eine gängige Möglichkeit ist, die Zahl im Dezimalsystem so lange mit Rest durch zwei zu teilen, bis das Ergebnis 0 R1 oder 0 R0 ist. Die Zahl im Binärsystem ergibt sich dann aus dem errechneten Rest aus jeder Division von der letzten Rechnung bis zur ersten.

Beispiel:

```
30 : 2 = 15 R0
15 : 2 = 7  R1
 7 : 2 = 3  R1
 3 : 2 = 1  R1
 1 : 2 = 0  R1
```

Das Ergebnis wäre dann `11110`.

Hinweis: Es gibt noch viele weitere Möglichkeiten, eine Zahl vom Dezimal- ins Binärsystem umzurechnen, beispielsweise durch Subtraktion der Zweierpotenzen.

Antwort – Teil 2: Bei der Umrechnung vom Binär- in das Dezimalsystem addiert man die jeweiligen der Einsen auf. Im Dezimalsystem gilt beispielsweise

$$123 = 1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 1 * 10^0.$$

So kann man auch eine Zahl im Binärsystem schreiben, aber dann mit Basis 2 anstelle der 10, also

$$1011 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0.$$

Die rechte Seite hat Wertigkeiten im Dezimalsystem und kann dementsprechend ausgerechnet werden.

2) Gebt für folgende Zahlen jeweils die Darstellung im Binär- oder Dezimalsystem an. Euer Rechenweg muss nachvollziehbar sein.
   a. $(00101010)_2 = (?)_{10}$
   b. $(123)_{10} = (?)_2$

Antwort:

a. $(00101010)_2 = 0 * 2^7 + 0 * 2^6 + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = (42)_{10}$

b. $(123)_{10} = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1$
$= 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0$
$= (1111011)_2$

Die Umrechnungen funktionieren natürlich nicht nur zwischen dem Binär- und dem Dualsystem. Man kann jede beliebige Basis verwenden. Denkbar wäre zum Beispiel auch die Betrachtung von 3 Ziffern (0, 1, 2). Am gängigsten sind aber das Binär-, das Oktal- (mit Ziffern von 0 bis 7) und das Dezimalsystem. Doch auch das Hexadezimalsystem ist vor allem in der Informatik weit verbreitet.

3) Wie viele unterschiedliche Ziffern betrachtet das Hexadezimalsystem und wo wird es verwendet?

Antwort: Im Hexadezimalsystem gibt es alle Ziffern von 0 bis 9 und zusätzlich die Buchstaben von A bis F, sodass man 16 verschiedene Wertigkeiten hat. Es wird viel in der Datenverarbeitung verwendet, da man vier Bits leicht als hexadezimale Zahl darstellen kann.

Die Umrechnung vom Dezimal- ins Hexadezimalsystem funktioniert so ähnlich wie die Umrechnung vom Dezimal- ins Binärsystem.

4) Wie kann man eine Zahl vom Binärsystem ins Hexadezimalsystem umrechnen? Muss man einen Zwischenschritt über das Dezimalsystem machen? Wie funktioniert die Umrechnung in der anderen Richtung?

Antwort: Man kann jeweils vier Bits, also vier Stellen einer Binärzahl, in einer Hexadezimalzahl zusammenfassen. Die vier Stellen umfassen Wertigkeiten von 0 bis 15, also genau die Wertigkeiten des Hexadezimalsystems. Deshalb muss man keinen Zwischenschritt machen, sondern kann die Ergebnisse direkt aus einer Umrechnungstabelle der ersten 16 Wertigkeiten ablesen.
In der anderen Richtung kann man ebenfalls stellenweise umrechnen und am Ende die Einzelergebnisse hintereinander schreiben.

5) Gebt folgende Zahlen im Hexadezimalsystem an.
   a. $(00101010)_2$
   b. $(123)_{10}$
   c. $(00001011)_2$
   d. $(11)_{10}$

Antwort:
a. $(00101010)_2 = (2A)_{16}$
b. $(123)_{10} = (7B)_{16}$
c. $(00001011)_2 = (B)_{16}$
d. $(11)_{10} = (B)_{16}$

6) Was ist die höchste Zahl, die im Hexadezimalsystem dargestellt werden kann, wenn man drei Stellen zur Verfügung hat? Gebt die Zahl im Hexadezimal- und im Dezimalsystem an. Welchen Zahlenbereich kann man (ohne Vorzeichen) bei einer dreistelligen Zahl im Binär- und im Dezimalsystem darstellen? Gebt alle Zahlen im Dezimalsystem an.

Antwort: Im Hexadezimalsystem kann man mit drei Stellen als höchste Zahl $(FFF)_{16}$ darstellen. Das entspricht einer Wertigkeit von $(4095)_{10}$. Bei einer dreistelligen Binärzahl geht der Wertebereich von $(000)_2$ bis $(111)_2$, also von $(0)_{10}$ bis $(7)_{10}$. Im Dezimalsystem geht der Wertebereich von $(000)_{10}$ bis $(999)_2$.

Natürlich kann man in den anderen Zahlensystemen auch rechnen. Das funktioniert fast genauso wie im Dezimalsystem.

7) Wie kann man zwei Zahlen im Binärsystem addieren und multiplizieren, ohne das Dezimalsystem zu verwenden? Beschreibt euer Vorgehen beim Lösen der folgenden Aufgaben:
   a. $(10001011)_2 + (10111011)_2$
   b. $(10001011)_2 \cdot (10111011)_2$

Antwort: Die Addition funktioniert genauso wie die schriftliche Addition im Dezimalsystem. Der einzige Unterschied ist, dass der Übertrag nicht erst bei 10, sondern schon bei 2 entsteht, damit wir im Ergebnis als Zahlen nur 0 und 1 erhalten. Bei der Multiplikation ist es genauso.
a. $(10001011)_2 + (10111011)_2 = (101000110)_2$
b. $(10001011)_2 \cdot (10111011)_2 = (110010110001001)_2$

8) Wie funktioniert die Division? Beschreibt in wenigen Sätzen das Vorgehen allgemein.

Antwort: Die Division ist ebenfalls mit der Division im Dezimalsystem vergleichbar. Da das Ergebnis jedoch nur aus 0 und 1 bestehen kann, gibt es auch nur diese beiden Möglichkeiten beim Subtrahieren: Entweder passt das Ergebnis in den betrachteten Abschnitt der Zahl, oder nicht. Ein vorheriges Vervielfältigen des Divisors ist nicht notwendig.

b) Boolesche Algebra (6 Punkte)

Das Dual- oder Binärsystem ist eine wichtige Grundlage für die so genannte Boolesche Algebra, die in der Informatik eine große Rolle spielt. 0 und 1 im Binärsystem können hier als Wahrheitswerte *„wahr“* und *„falsch“* betrachtet werden.

In der Booleschen Algebra werden logische Operatoren wie *und* (Λ), *oder* (V) und *nicht* (¬) betrachtet. Die Bedeutung dieser Operatoren kann man am besten an so genannten Wahrheitstafeln ablesen. Dabei sind zwei Aussagen A und B entweder *wahr (1)* oder *falsch (0)*. Rechts ist eine solche Wahrheitstafel für die Verknüpfung *oder* dargestellt. Man sieht, dass „A V B“ genau dann wahr ist, wenn entweder A oder B oder beide wahr sind.

1) Gebt die Wahrheitstafeln für *und* (für zwei Aussagen) und *nicht* (für eine Aussage) an. Wie sieht die Wahrheitstafel für *oder* aus, wenn man anstelle von A und B drei Aussagen A, B und C betrachtet?

Antwort:

Wahrheitstafel UND

A	B	A Λ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wahrheitstafel NICHT

A	¬ A
0	1
1	

Wahrheitstafel ODER

A	B	C	A v B v C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Wie auch beim Rechnen mit Zahlen gelten in der Booleschen Algebra ein paar Gesetze, die das Rechnen erleichtern sollen.

2) Überlegt euch, ob folgende Aussagen und Gesetze gelten oder nicht. Begründet eure Antworten in einem Satz. Schreibt auch jeweils hin, was das jeweilige Gesetz bedeutet.
   a. Kommutativgesetze für *und* und *oder*
   b. Assoziativgesetze für *und* und *oder*
   c. Extremalgesetze

Antwort:
a. Das Kommutativgesetz besagt, dass man beide Variablen bzw. Aussagen vertauschen darf, ohne das Ergebnis zu verändern, also A oder B hat das gleiche Ergebnis wie B oder A. Da die Wahrheitstafeln symmetrisch sind, gilt die Kommutativität für beide Operatoren.
b. Die Assoziativgesetze sagen aus, dass bei drei Variablen die Reihenfolge des Ausführens der Operatoren, d.h. die Klammerung, keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Das gilt auch für die beiden Operatoren.
c. Das Extremalgesetz für *und* sagt, dass eine Aussage *und* „falsch“ immer „falsch“ ergibt, unabhängig von der Aussage. Im Fall von *oder* sagt es aus, dass eine Aussage *oder* „wahr“ immer „wahr“ ergibt. Diese beiden Gesetze gelten auch, wie sich an den Wahrheitstafeln erkennen lässt.

3) Was ist die Idempotenz und was sagen die Dualitätsgesetze aus?

Antwort: Die Idempotenz macht eine Aussage über die *und*- bzw. *oder*-Verknüpfung einer Aussage mit sich selbst. Es gilt „a *und* a = a" sowie „a *oder* a = a". Die Dualitätsgesetze besagen „nicht wahr = falsch" und „nicht falsch = wahr". Wahr und falsch sind also dual zueinander.

Bei dem Beweis von logischen Aussagen können Wahrheitstafeln sehr hilfreich sein.

4) Beweist die Aussage des Distributivgesetzes A Λ (B V C) = (A Λ B) V (A Λ C), indem ihr folgende Wahrheitstafel ausfüllt. Begründet hinterher kurz, warum die Aussage damit bewiesen ist.

Antwort: Die Aussage ist wahr, da in der letzten Spalte nur Einsen stehen. Da die Aussage also für jede Kombination der Eingabeparameter wahr ist, gilt dies für die Aussage.

A	B	C	B V C	A Λ (B V C)	A Λ B	A Λ C	(A Λ B) V (A Λ C)	A Λ (B V C) = (A Λ B) V (A Λ C)
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

5) Beweist auf diese Art und Weise eines der De Morganschen Gesetze. Gebt auch ein konkretes Beispiel mit zwei Aussagen an, mit dem ihr erklären könnt, was die De Morganschen Gesetze bedeuten.

Antwort: Wenn es regnet und die Sonne scheint, gibt es einen Regenbogen. Das heißt, wenn es keinen Regenbogen gibt, kann es entweder nicht regnen, oder die Sonne scheint nicht. Das heißt, (es regnet und die Sonne scheint) ist falsch.

A	B	A Λ B	¬ (A Λ B)	¬ A	¬ B	¬ A V ¬ B	¬ (A Λ B) = ¬ A V ¬ B
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

c) Die Rechenmaschine (10 Punkte)

Besonders berühmt wurde Leibniz für seine Rechenmaschine, die als technisches Wunderwerk des 17. Jahrhunderts gilt. Bei seiner Rechenmaschine handelte es sich um eine so genannte *Vier-Spezies-Rechenmaschine*, die auf mechanische Weise alle vier Grundrechenarten ausführen konnte.

© GWLB, Quelle: www.hannover.de

Heutzutage benötigt man zum Glück keine mechanischen Apparaturen mehr, um komplizierte Rechnungen auszuführen. Stattdessen greift man auf digitale Ausführungen von Taschenrechnern zurück.

In dieser Teilaufgabe sollt ihr einen Taschenrechner in Java programmieren, der im Dezimalsystem alle vier Grundrechenarten beherrscht (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division). Außerdem soll es die Möglichkeit geben, eine Zahl vom Dezimalsystem ins Binär-, Oktal- oder Hexadezimalsystem umrechnen zu lassen. Implementiert auch die Addition und Multiplikation im Binärsystem.

Hinweise:

1. Wenn ihr noch keine Programmiererfahrung habt, nutzt die erste Aufgabe aus dem letzten Durchgang des Wettbewerbs als Hilfestellung. Diese findet ihr auch unter https://www.unikik.uni-hannover.de/clubapollo_aufgaben.html
2. Ihr könnt euer Programm entweder mit *eclipse* (www.eclipse.org/) oder *netbeans* (www.netbeans.org/) schreiben, oder ihr verwendet die Webseite www.compilejava.net, falls ihr keine neue Software installieren wollt.
3. Ihr könnt ein Konsolenprogramm schreiben, das nacheinander zwei Zahlen und einen Operator einliest und dann das Ergebnis ausgibt.
4. Wenn ihr Erfahrungen im Programmieren habt, könnt ihr auch ein Programm mit graphischer Benutzeroberfläche schreiben. Dies ist aber nicht unbedingt nötig.
5. Abzugeben ist der Quellcode, oder (bevorzugt) ein Export des Projektes aus *eclipse* oder *netbeans*, und eine ausführbare Datei (*exe* oder *jar*).
6. Gebt eure Lösung auch dann ab, wenn ihr nicht alle Funktionen implementiert habt!

Hinweise:
Zu dieser Aufgabe wird keine Musterlösung veröffentlicht.