unikik

Leibniz Universität Hannover

CLUB APOLLO 13, 16. Wettbewerb
Lösungsvorschläge zur Aufgabe 3

Immer positiv bleiben!

Wir sind absolut zuversichtlich, dass euch im Alltag zahlreiche Beispiele für Graphen aufgefallen sind, so dass wir uns sofort auf die Suche nach den positiven Graphen machen.

Frage Nr.1.

Warum können wir uns darauf beschränken, zusammenhängende Graphen zu betrachten? Begründet dafür, wie der Q-Wert eines Graphen Γ (lies: Gamma) mit dem Q-Wert der einzelnen Zusammenhangskomponenten von Γ genau zusammenhängt.

Um die Antwort auf diese Frage so präzise wie möglich formulieren zu können, müssen wir einige Notationen einführen. Wir bezeichnen mit V (aus dem Englischen *vertex*) die Menge aller Knoten und mit E (aus dem Englischen *edge*) die Menge aller Kanten des Graphen Γ. Jede Kante $e \in E$ besitzt zwei Enden $\varepsilon_1(e), \varepsilon_2(e) \in V$. Für eine gegebene Belegung $B = B(\Gamma)$ des Graphen Γ soll $w(v)$ den Wert am Knoten $v \in V$ bezeichnen. Mit diesen Bezeichnungen kann nun die Formel für den Q-Wert der Belegung B wie folgt ausgedrückt werden:

$$Q(B) = \sum_{v \in V} w(v)^2 - \sum_{e \in E} w\big(\varepsilon_1(e)\big) \cdot w\big(\varepsilon_2(e)\big).$$

Nehmen wir nun an, dass sich die Knotenmenge V in zwei nichtleere Mengen V_1 und V_2 derart aufspalten lässt, dass es gar keine Kante mit einem Ende in V_1 und dem anderen Ende in V_2 gibt, wie es zum Beispiel bei den beiden S-Bahn Liniennetzen aus Stuttgart und Frankfurt der Fall ist. Dann können wir auch die Menge aller Kanten zerlegen, denn entweder hat eine Kante e beide Enden in V_1 (dann sagen wir: $e \in E_1$) oder sie hat beide Enden in V_2 (womit $e \in E_2$ festgelegt wäre); eine dritte Möglichkeit ist nach unserer Annahme über die Aufteilung der Ecken von V ausgeschlossen. Insgesamt haben wir den Graphen Γ in zwei Teilgraphen Γ_i $(i = 1, 2)$ zerlegt: Γ_i besteht aus den Knoten in V_i und den zugehörigen Kanten in E_i. Jede Belegung B des Graphen Γ führt auf diese Weise (betrachte nur die Werte auf den Knoten in V_1 bzw. V_2) zu einer Belegung B_i des Teilgraphen Γ_i $(i = 1, 2)$ und damit lässt sich auch der Q-Wert der Belegung aufspalten:

$$\begin{aligned}
Q(B) &= \sum_{v \in V} w(v)^2 - \sum_{e \in E} w\big(\varepsilon_1(e)\big) \cdot w\big(\varepsilon_2(e)\big) \\
&= \sum_{\tilde{v} \in V_1} w(\tilde{v})^2 + \sum_{v' \in V_2} w(v')^2 - \sum_{\tilde{e} \in E_1} w\big(\varepsilon_1(\tilde{e})\big) \cdot w\big(\varepsilon_2(\tilde{e})\big) - \sum_{e' \in E_2} w\big(\varepsilon_1(e')\big) \cdot w\big(\varepsilon_2(e')\big) \\
&= \underbrace{\sum_{\tilde{v} \in V_1} w(\tilde{v})^2 - \sum_{\tilde{e} \in E_1} w\big(\varepsilon_1(\tilde{e})\big) \cdot w\big(\varepsilon_2(\tilde{e})\big)}_{=Q(B_1)} + \underbrace{\sum_{v' \in V_2} w(v')^2 - \sum_{e' \in E_2} w\big(\varepsilon_1(e')\big) \cdot w\big(\varepsilon_2(e')\big)}_{=Q(B_2)} \\
&= Q(B_1) + Q(B_2).
\end{aligned}$$

Aus dieser Überlegung folgt, dass der Q-Wert eines Graphen die *Summe* der Q-Werte der einzelnen Zusammenhangskomponenten ist. Sind also $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ die Zusammenhangskomponenten eines Graphen Γ, so gilt für die zugehörigen Bewertungsfunktionen

$$Q_\Gamma = Q_{\Gamma_1} + \ldots + Q_{\Gamma_s}.$$

Damit ist ein Graph Γ offensichtlich genau dann positiv, wenn es jede einzelne seiner Zusammenhangskomponenten ist. Aus diesem Grund dürfen wir den Zusammenhang eines Graphen bei Bedarf voraussetzen: Jeder positive Graph besteht aus endlich vielen, *positiven* zusammenhängenden Graphen.

Frage Nr.2.

Begründet, warum der Q-Wert einer Belegung eines Graphen Γ mit dem Q-Wert der Belegung desjenigen Teilgraphen Λ (lies: Lambda) von Γ übereinstimmt, der nur die Knoten mit Eintrag ungleich Null berücksichtigt. Erklärt damit, warum positive Graphen keine Teilgraphen besitzen können, die nicht positiv sind.

Wir verwenden weiterhin die gerade eingeführte Notation. Es sei B eine beliebige Belegung des Graphen Γ. Anhand der Belegung B können wir die Knotenmenge von Γ aufteilen je nachdem, ob der Knoten v den Wert Null aufweist oder nicht (man beachte, dass diese Zerlegung von der Belegung B abhängig ist!):

$$V_1 = \{v \in V \mid w(v) = 0\} \qquad \text{und} \qquad V_2 = \{v \in V \mid w(v) \neq 0\}.$$

Der Beitrag zum Q-Wert von B einer Kante $e \in E$ mit mindestens einem Ende in V_1 ist Null, denn mindestens einer der Faktoren $w(\varepsilon_1(e))$, $w(\varepsilon_2(e))$ ist Null. Entsprechend kann der Beitrag $\sum_{v\in V_1} w(v)^2 = \sum_{v\in V_1} 0^2 = 0$ der Knoten in V_1 zum Q-Wert weggelassen werden, so dass nur die Knoten in V_2 und die Kanten mit *beiden* Enden in V_2 (diese Knotenmenge V_2 und Kantenmenge E_2 fassen wir in dem Teilgraphen Λ zusammen) bei der Berechnung berücksichtigt werden müssen:

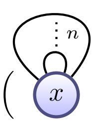
$$Q_\Gamma(B) = \sum_{v\in V_2} w(v)^2 - \sum_{e\in E_2} w\big(\varepsilon_1(e)\big)\cdot w\big(\varepsilon_2(e)\big).$$

Die rechte Seite der Gleichung kann nun als Q-Wert derjenigen Belegung $\tilde{B}$ von Λ aufgefasst werden, die nur die Werte der Knoten in V_2 berücksichtigt.
Demzufolge können positive Graphen Γ keine Teilgraphen Λ besitzen, die nicht positiv sind. Ist Λ nämlich nicht positiv, so finden wir eine Belegung $\tilde{B}$, verschieden von der Nullbelegung, mit $Q_\Lambda(\tilde{B}) \le 0$. Erweitert man die Belegung $\tilde{B}$ zu einer Belegung B des ganzen Graphen Γ dadurch, dass die restlichen Knoten den Wert Null erhalten, so folgt aus obiger Gleichung $Q_\Gamma(B) = Q_\Lambda(\tilde{B}) \le 0$, was die Positivität von Γ ausschließt.

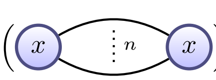
Frage Nr.3.

Begründet, warum ein positiver Graph (a) keine Schleifen (b) keine Mehrfachkanten enthalten darf.

Um die erste Frage zu beantworten, betrachten wir den Graphen bestehend aus einem einzigen Knoten und $n \ge 1$ Schleifen. Jede Belegung des Knotens mit einem Wert $x \in \mathbb{R}$ führt zu einem nichtpositiven Q-Wert:

$Q\Big($  $\Big) = x^2 - n(x\cdot x) = \overbrace{(1-n)}^{\le 0}x^2 \le 0.$

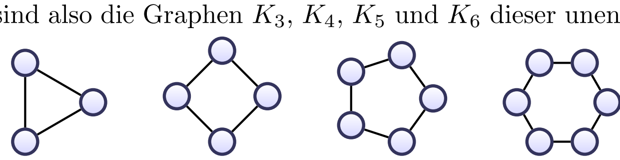
Für die zweite Frage betrachten wir den Graphen bestehend aus zwei Knoten und $n \ge 2$ Kanten, die beide Knoten verbinden. Keine Belegung, die beiden Knoten denselben Wert $x \in \mathbb{R}$ zuordnet, liefert einen positiven Q-Wert:

$Q\Big($  $\Big) = x^2 + x^2 - n(x\cdot x) = \overbrace{(2-n)}^{\le 0}x^2 \le 0.$

Frage Nr.4.

Begründet, warum ein positiver Graph keine Kreise enthalten darf.

Denjenigen Graphen, der durch einen Rundweg über $n \ge 3$ Stationen entsteht, wollen wir K_n nennen. Nachfolgend sind also die Graphen K_3, K_4, K_5 und K_6 dieser unendlichen Familie gezeichnet:

 $\ldots$

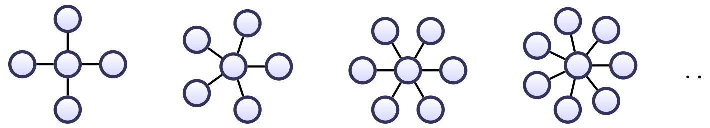
Der Graph K_n besitzt nicht nur n Knoten, er hat ebenso n Kanten. Belegt man nun K_n auf homogene Weise und ordnet jedem Knoten denselben Wert $x \in \mathbb{R}$ zu, so erhält man eine Belegung B mit Q-Wert Null, und demzufolge ist K_n kein positiver Graph:

$$Q(B) = n\cdot x^2 - n(x\cdot x) = nx^2 - nx^2 = 0.$$

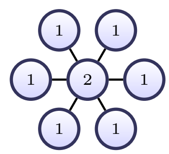
Frage Nr.5.

Begründet, warum in einem positiven Graphen kein Knoten vier oder mehr Nachbarn besitzen darf.

Besitzt ein Knoten eines Graphen Γ vier oder mehr Nachbarn, so finden wir einen der folgenden Graphen S_{n+1} als Teilgraphen von Γ:



Dabei soll S_{n+1} einen Stern mit einem zentralen Knoten, der über je eine Kante zu n weiteren benachbarten Knoten verbunden ist, bezeichnen (die obige Auflistung fängt also mit $S_{4+1} = S_5$ an). Wir belegen zum ersten Mal einen Graphen auf inhomogene Weise und ordnen dem zentralen Knoten den Wert 2 und den n benachbarten Knoten den Wert 1 zu, beispielsweise



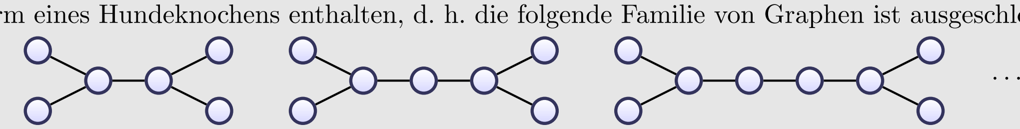
für den Graphen S_7. Der Q-Wert dieser Belegung B lautet

$$Q(B) = 2^2 + n \cdot 1^2 - n(2 \cdot 1) = 4 + n - 2n = 4 - n,$$

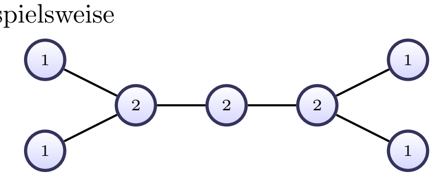
und dieser Wert ist bei $n \geq 4$ Nachbarn niemals positiv.
Wir merken an, dass es ausreichen würde, wenn man nur den Stern mit 4 Kanten betrachtet, da er als Teilgraph von jedem Stern S_{n+1} mit $n \geq 4$ vorkommt.

Frage Nr.6.

Begründet, warum es in einem (zusammenhängenden) positiven Graphen keine zwei Knoten mit drei Nachbarn geben darf. Mit anderen Worten: Ein positiver Graph darf keinen Teilgraphen in der Form eines Hundeknochens enthalten, d. h. die folgende Familie von Graphen ist ausgeschlossen:



Wie wir gerade gesehen haben, dürfen Knoten in einem positiven Graphen höchstens drei Nachbarn haben. Angenommen, der positive Graph Γ besitze mindestens zwei Knoten, sagen wir v und w, mit drei Nachbarn. Da Γ als zusammenhängend vorausgesetzt werden darf (Antwort zur 1.Frage), können v und w durch einen Kantenzug verbunden werden. In diesem Kantenzug taucht kein Knoten zwei Mal auf (sonst gäbe es einen Rundweg in unserem Graphen, was die Antwort zur 4.Frage ausschließt) sowie kein weiterer Knoten mit drei Nachbarn (ansonsten stoppe man den Kantenzug - von v startend - bei diesem früheren Knoten und ersetze w). Dieser Kantenzug bildet den mittleren Bereich des „Hundeknochens“. Fügt man zusätzlich die beiden weiteren Nachbarn (mitsamt zugehöriger Kanten) von v und w hinzu, so entsteht der „Hundeknochen “als Teilgraphen von Γ.
Wir betrachten den Hundeknochen mit $n+4$ Knoten, wobei der mittlere Bereich aus einer Kette mit n Knoten besteht. Diesen mittleren Bereich belegen wir mit dem Wert 2, die vier äußeren Knoten dagegen mit dem Wert 1; beispielsweise



für den Hundeknochen mit sieben Knoten. Wir ermitteln den Q-Wert dieser Belegung B und erhalten:

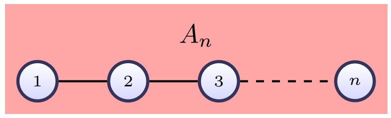
$$Q(B) = n \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^2 - 4(2 \cdot 1) - (n-1)(2 \cdot 2) = 4n + 4 - 8 - 4(n-1) = 8 - 8 = 0.$$

Damit scheiden auch Hundeknochen als positive Graphen aus, und demzufolge kann ein zusammenhängender positiver Graph höchstens eine Dreifachverbindung besitzen.

Frage Nr.7.

Wie sieht ein zusammenhängender, einfacher, kreisfreier Graph, dessen Knoten jeweils höchstens zwei Nachbarn besitzen, aus? Findet einen griffigen Namen für diesen Typ von Graphen!

Für jede mögliche Anzahl von Knoten $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen Graphen A_n mit diesen Eigenschaften, nämlich eine Kette aus n Knoten:



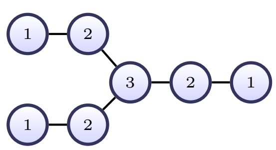
Die Zahlen sollen ausnahmsweise keine Belegung des Graphen darstellen, sondern eine Nummerierung der Knoten nahelegen. Warum ist dies die einzige Möglichkeit? Je zwei Knoten eines zusammenhängenden Graphen lassen sich durch einen Kantenzug verbinden, und unser Graph ist der prototypische Kantenzug mit n Knoten. Lässt sich dieser Graph erweitern, ohne eine der gestellten Bedingungen zu verletzen? Nun, wir können keine weitere Kante hinzufügen: Schleifen sind grundsätzlich nicht erlaubt, eine weitere Kante im mittleren Bereich führt zu Doppelkanten (nicht möglich bei positiven Graphen nach der Antwort zur 2.Frage), also bliebe nur die Verbindung der beiden äußeren Endknoten (mit Nummern 1 und n) miteinander, was zu einem Kreis K_n (verboten nach der 4.Frage) führen würde. Will man diesen Graphen mit einem weiteren Knoten erweitern, so muss der neue Knoten zu einem der bisherigen Knoten (wegen des Zusammenhangs) durch eine weitere Kante verbunden werden. Aber nur die Verbindung zu einem der beiden Endknoten ist zulässig (und man erhält den nächsten Graphen A_{n+1} in der Serie), denn alle inneren Knoten besitzen bereits die maximal erlaubte Anzahl von Nachbarn, nämlich zwei.
Neben *Kette* erscheint uns auch *Stamm* ein treffender Name, aber vielleicht suggerierte euch die Figur ganz andere Möglichkeiten zur Namensgebung!

Frage Nr.8.

Begründet, warum für positives $\Gamma_{p,q,r}$ (i) $p = 1$ und (ii) $q < 3$ gelten muss.

Hinweis: Es müssen also die Graphen $\Gamma_{2,2,2}$ sowie $\Gamma_{1,3,3}$ ausgeschlossen werden.

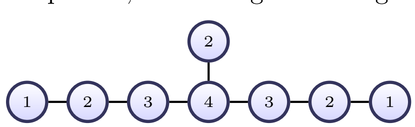
Nach unseren bisherigen Überlegungen fehlt nur noch die Untersuchung der dreiarmigen Graphen $\Gamma_{p,q,r}$ mit Armen der Längen $p \leq q \leq r$. Besitzt der kürzeste Arm mindestens 2 Kanten (also $p \geq 2$), so hat jeder der drei Arme mindestens zwei Kanten, und der Graph enthält $\Gamma_{2,2,2}$ als Teilgraphen. Dies ist aber nicht möglich, denn dieser Graph ist nicht positiv, wie die nachfolgende Belegung B zeigt:



Für diese Belegung gilt nämlich:

$$Q(B) = 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 - 3(3 \cdot 2) - 3(2 \cdot 1) = 9 + 12 + 3 - 18 - 6 = 0.$$

Also müssen positive Graphen dieser Familie $p = 1$ erfüllen, d.h., die Bedingung (i). Enthielte dann der nächst längere Arm mindestens drei Kanten (also $q \geq 3$), so hätte der längste Arm auch mehr als zwei Kanten ($r \geq 3$) und wir fänden $\Gamma_{1,3,3}$ als Teilgraphen. Aber auch das ist für positive Graphen nicht möglich, denn $\Gamma_{1,3,3}$ ist nicht positiv, da die folgende Belegung B



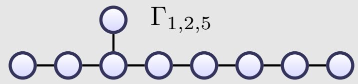
den Q-Wert Null hat:

$$\begin{aligned} Q(B) &= 4^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 - \big(2(3 \cdot 4) + 2 \cdot 4 + 2(2 \cdot 3) + 2(2 \cdot 1)\big) \\ &= 16 + 18 + 12 + 2 - (24 + 8 + 12 + 4) = 48 - 48 = 0. \end{aligned}$$

Frage Nr.9.

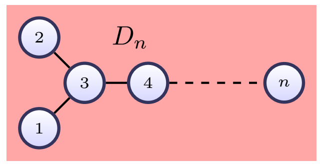
Begründet, warum für positives $\Gamma_{1,2,r}$ die Länge des dritten Armes durch $r < 5$ beschränkt sein muss.

Mit anderen Worten: Der Graph $\Gamma_{1,2,5}$ (warum genau *nur* dieser Graph?)

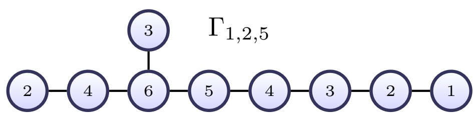


muss als Teilgraph eines positiven Graphen ausgeschlossen werden.

Die Antwort zur Frage Nr.8 erlaubt nur die Fälle $q = 1$ oder $q = 2$. Die Werte $p = q = 1$ und $r \geq 1$ beliebig führen zu einer weiteren unendlichen Familie von Graphen. Einen Graphen dieser Familie wollen wir mit D_n (anstatt $\Gamma_{1,1,r}$) bezeichnen, wobei $n \geq 4$ die Gesamtzahl von Knoten ist (erneut sollen die Zahlen in den Knoten keine Belegung, sondern eine Nummerierung darstellen):



Für Graphen der allerletzten Familie $\Gamma_{1,2,r}$ (also $p = 1$ und $q = 2$) darf der dritte Arm nicht zu lang werden: Enthielte der längste Arm mindestens 5 Kanten (also $r \geq 5$), so wäre $\Gamma_{1,2,5}$ ein Teilgraph, was aber nach der Antwort zur Frage Nr.2 unmöglich ist, denn dieser Graph ist nicht negativ. Mit etwas Mühe findet man nämlich die folgende Belegung B (oder ein Vielfaches davon):



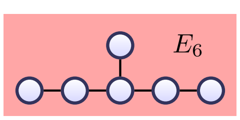
Der Beitrag der Knoten zum Q-Wert lautet

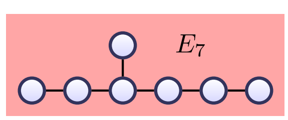
$$6^2 + (5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2) + (4^2 + 2^2) + 3^2 = 36 + 55 + 20 + 9 = 120,$$

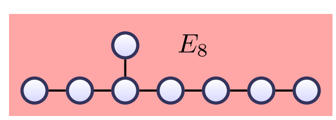
während der Kantenbeitrag

$$(6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1) + (6 \cdot 4 + 4 \cdot 2) + (6 \cdot 3) = 70 + 32 + 18 = 120$$

beträgt; so dass schließlich $Q(B) = 120 - 120 = 0$ gilt. Auch die letzten drei Graphen $\Gamma_{1,2,2}$, $\Gamma_{1,2,3}$ und $\Gamma_{1,2,4}$, die sich zu unserer Liste gesellen, erhalten einen neuen Namen (der Index bezeichnet konsequenterweise erneut die vorhandene Knotenanzahl):

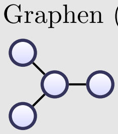


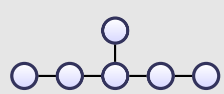




Frage Nr.10.

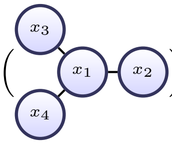
Zeigt, dass die folgenden Graphen (der Dreistern und $\Gamma_{1,2,2}$) positiv sind:





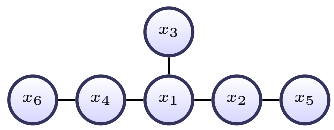
Nach dem Bisherigen wissen wir, dass ein positiver, zusammenhängender Graph nur einer der Graphen A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7 oder E_8 sein kann. Die Positivität all dieser Graphen ist aber nicht nachgewiesen worden, und dies wollen wir für die beiden Graphen D_4 und E_6 (in der neuen Notation) exemplarisch nachholen. Glücklicherweise kommen wir mit der zweiten binomischen Formel aus, wenn wir den jeweiligen Q-Wert durch geschickte sukzessive quadratische Ergänzung umformen.

Fangen wir mit einer beliebigen Belegung durch Werte $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ des Graphen D_4 an:

$Q\Big($  $\Big)$

$$\begin{aligned}
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 \\
&= x_2^2 - x_1x_2 + \frac{x_1^2}{4} + x_3^2 - x_1x_3 + \frac{x_1^2}{4} + x_4^2 - x_1x_4 + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1^2}{4} \\
&= (x_2 - \frac{x_1}{2})^2 + (x_3 - \frac{x_1}{2})^2 + (x_4 - \frac{x_1}{2})^2 + (\frac{x_1}{2})^2.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine Summe aus vier Quadraten reeller Werte, also gilt $Q(B) \geq 0$ für jede Belegung B des Graphen D_4. Der Q-Wert kann nur dann Null sein, wenn jeder einzelne der vier Summanden Null ist. Der Bruch $\frac{x_1^2}{4} = (\frac{x_1}{2})^2$ nimmt den Wert Null nur für $x_1 = 0$ an, und demzufolge muss $x_4 = x_3 = x_2 = \frac{x_1}{2} = 0$ gelten, so dass ausschließlich die Nullbelegung von D_4 zum Q-Wert Null führt.
Eine völlig analoge Argumentation kann für eine beliebige Belegung B des Graphen E_6



mit Werten $x_1, \ldots, x_6$ verwendet werden. Wir geben in diesem Falle nur die zielführende Umformung des Q-Werts an:

$$\begin{aligned}
Q(B) &= x_1^2 + \ldots + x_6^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_5 - x_4x_6 \\
&= (x_6 - \frac{x_4}{2})^2 + (x_5 - \frac{x_2}{2})^2 + x_1^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + x_3^2 + \frac{3}{4}x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 \\
&= (x_6 - \frac{x_4}{2})^2 + (x_5 - \frac{x_2}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x_4 - \frac{x_1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{x_1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{1}{3}x_1^2 - x_1x_3 + x_3^2 \\
&= (x_6 - \frac{x_4}{2})^2 + (x_5 - \frac{x_2}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x_4 - \frac{x_1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{x_1}{\sqrt{3}})^2 + (x_3 - \frac{x_1}{2})^2 + \frac{1}{12}x_1^2.
\end{aligned}$$

Einordnung. Mit den Mitteln der letzten Antwort kann man durchaus alle Kandidaten für Positivität abarbeiten und nachweisen, dass

$$A_n \ (n \geq 1), \quad D_n \ (n \geq 4), \quad E_6, E_7, E_8$$

die vollständige Liste aller positiven, zusammenhängenden Graphen bildet. Es sei allerdings angemerkt, dass es zielgerichtetere Methoden gibt, um die Positivitätsfrage zu klären, und die man typischerweise in einem Studium der Mathematik kennenlernt.
Diese Graphen sind unter dem Namen Dynkin-Diagramme bekannt. Sie haben viele Mathematiker fasziniert (und tun es immer noch), da sie unerwartet in zahlreichen Klassifikationen mathematischer Objekte aufgetaucht sind, die a priori nicht miteinander verwandt schienen[1]. Oft genug kann das Auftauchen der Dynkin-Diagramme im Rahmen einer mathematischen Klassifikation auf die Positivitätseigenschaft zurückgeführt werden, die Gegenstand dieser Aufgabe war.
Ein guter Startpunkt, um das vielfältige Erscheinen dieser (und nahe verwandter) Diagramme sind die unten stehenden Artikel der englischsprachigen Wikipedia. Der Artikel [1] geht auf das Phänomen der Allgegenwärtigkeit dieser Graphen innerhalb der Mathematik vertieft ein.

Zitierte elektronische Quellen. Beide Quellen sind am 18.01.2017 abgerufen worden.

ADE classification: `https://en.wikipedia.org/wiki/ADE_classification`

Dynkin diagram: `https://en.wikipedia.org/wiki/Dynkin_diagram`

Literatur

[1] Hazewinkel, M.; Hesselink, W.; Siersma, D.; Veldkamp, F. D. *The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the A-D-E problem).* Nieuw Arch. Wisk. (3) 25 (1977) no.3, 257–307.

[1] Das aus der Chemie vertraute Periodensystem der Elemente ist eine gute Analogie für mathematische Klassifikationen. Bei diesen ist man bemüht, eine vollständige Übersicht aller Objekte (oft genug „atomaren“ Charakters) einer mathematischen Disziplin zu gewinnen sowie deren wesentliche Eigenschaften zu bestimmen.